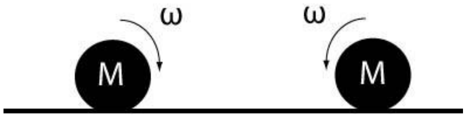
Φυσική Ι – Εξέταση Ιουνίου 2010 **Α**

1. Δύο σφαίρες κυλούν με γωνιακή ταχύτητα ω=10 rad/s (χωρίς να ολισθαίνουν) πάνω σε επίπεδο, όπως φαίνεται στο σχήμα. Οι σφαίρες έχουν μάζα M=1 kg, ακτίνα R=5 cm, και είναι φτιαγμένες από αλουμίνιο. Τη στιγμή που συναντώνται ακινητοποιούνται. Να υπολογιστεί η αύξηση της θερμοκρασίας τους αν υποτεθεί ότι όλη η κινητική ενέργεια μετατρέπεται σε θερμότητα. Δίνεται η ειδική θερμότητα του αλουμινίου, c=900 J/kg C.



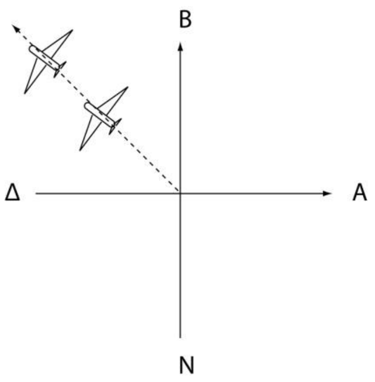
<u>Λύση</u>

Η κινητική ενέργεια κάθε σφαίρας είναι $\varepsilon=Mv^2/2+I\omega^2/2$, όπου η ροπή αδράνειας της σφαίρας είναι $I=2MR^2/5$ και $v=\omega R$. Αρα η ολική κινητική ενέργεια που μετατρέπεται σε θερμότητα είναι 2ε, οπότε έχουμε $2\varepsilon=c2M\Delta T$, όπου 2M είναι η συνολική μάζα. Αρα $\Delta T=\varepsilon/cM=2.0 \times 10^{-4}\ ^{o}C$. Ομοίως βρίσκουμε για το πρόβλημα της σειράς Β, όπου $I=MR^2/2$, ότι $\Delta T=4.8 \times 10^{-4}\ ^{o}C$.

2. Ο πιλότος ενός αεροσκάφους θέλει να πετάξει προς βοριο-δυτική (για τη σειρά Β νοτιοδυτική) κατεύθυνση, ενώ ο άνεμος φυσάει με ταχύτητα 50 km/h προς ανατολική (για τη σειρά Β βόρια) κατεύθυνση. Αν η ταχύτητα του αεροσκάφους όταν δε φυσάει ο άνεμος (με άλλα λόγια η μέγιστη ταχύτητα που μπορεί να αναπτύξει το αεροσκάφος ως προς τον άνεμο) είναι 200 km/h, (a) σε ποια διεύθυνση πρέπει να κατευθύνεται το αεροσκάφος και (b) ποια θα είναι η ταχύτητά του ως προς το έδαφος ;

<u>Λύση</u>

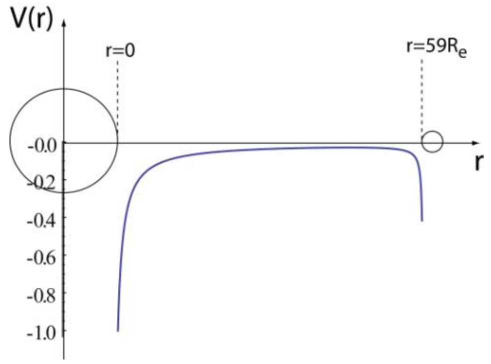
Η ταχύτητα του αεροσκάφους ως προς τη γη, $\mathbf{v}_{A,\Gamma\eta}$, ισούται με την ταχύτητα του αεροσκάφους ως προς τον άνεμο, $\mathbf{v}_{A,A\nu}$, συν την ταχύτητα του ανέμου ως προς τη γη, $\mathbf{v}_{A\nu,\Gamma\eta}$, δηλαδή $\mathbf{v}_{A,\Gamma\eta}= \mathbf{v}_{A,A\nu}+ \mathbf{v}_{A\nu,\Gamma\eta}$. Αν περιγράψουμε με το επίπεδο x-y το σύστημα συντεταγμένων βορά-νότου-ανατολή-δύση, η ταχύτητα του ανέμου ως προς τη γη είναι $\mathbf{v}_{A\nu,\Gamma\eta}=50\mathbf{x}$ (**x** και **y** είναι τα μοναδιαία διανύσματα στο επίπεδο x-y). Η επιθυμητή ταχύτητα του αεροσκάφους ως προς τη γη είναι $\mathbf{v}_{A,\Gamma\eta}=v(-\mathbf{x}+\mathbf{y})/\sqrt{2}$, όπου προφανώς $(-\mathbf{x}+\mathbf{y})/\sqrt{2}$ είναι το μοναδιαίο διάνυσμα προς τη βοριο-δυτική κατεύθυνση. Βρίσκουμε λοιπόν $v(-\mathbf{x}+\mathbf{y})/\sqrt{2} = \mathbf{v}_{A,A\nu} +50\mathbf{x}$. Αφού η ταχύτητα του αεροσκάφους ως προς τον άνεμο είναι 200 km/h, έπεται ότι $|\mathbf{v}_{A,A\nu}|=200$, άρα η ταχύτητα του αεροσκάφους ως προς το έδαφος είναι v=161 km/h. Επίσης η ταχύτητα του αεροσκάφους ως προς τον άνεμο θα είναι $\mathbf{v}_{A,A\nu} = -50\mathbf{x}+ 161(-\mathbf{x}+\mathbf{y})/\sqrt{2} = -211\ \mathbf{x}+161\mathbf{y}$, οπότε το αεροσκάφος πρέπει να κατευθύνεται $\theta=37.3^{o}$ βόρεια της δυτικής πορείας,



όπου tanθ=161/211. Δηλαδή η μύτη του αεροσκάφους κοιτάει 37.3^o βόρεια της δύσης, η πορεία του όμως είναι βορειοδυτική, δηλαδή στις 45^o βόρεια της δυτικής πορείας. Ομοίως, για το πρόβλημα της σειράς Β βρίσκουμε ότι v=161 km/h και θ=37.3^o δυτικά της νότιας πορείας.

3. Εξηγήστε γιατί ένα διαστημόπλοιο καταναλώνει περισσότερα καύσιμα (ενέργεια) για να πάει από την επιφάνεια της Γης στην επιφάνεια της Σελήνης απ'ότι για να γυρίσει. β) Υπολογίστε πόσες φορές περισσότερη ενέργεια χρειάζεται για να πάει στην Σελήνη απ'ότι για να επιστρέψει αν γνωρίζετε ότι: η απόσταση από την επιφάνεια της Γης στην επιφάνεια της Σελήνης είναι 59 φορές μεγαλύτερη από την ακτίνα της Γης, η ακτίνα της Σελήνης 4 φορές μικρότερη από αυτήν της Γης και η μάζα της Σελήνης είναι 10 φορές μικρότερη από τη μάζα της Γης. Αγνοήστε την ατμόσφαιρα της Γης και θεωρήστε ότι όταν φθάνει στην επιφάνεια κάθε σώματος έχει μηδενική ταχύτητα.

Λύση



Η δυναμική ενέργεια του διαστημόπλοιου στο βαρυτικό πεδίο γης-σελήνης είναι $V(r) = -G\dfrac{M_e m}{r+R_e} - -G\dfrac{M_m m}{59R_e - r + R_m}$.

Θέτοντας M_m=M_e/10 και R_m=R_e/4 βρίσκουμε $V(x) = -G\dfrac{M_e m}{R_e}\left(\dfrac{1}{1+x} + \dfrac{0.1}{59.25-x}\right)$, όπου η αδιάστατη μεταβλητή x=r/R_e παίρνει τιμές από 0 (επιφάνεια γης) μέχρι 59 (επιφάνεια σελήνης). Στο σχήμα έχουμε σχεδιάσει την συνάρτηση $f(x) = -\left(\dfrac{1}{1+x} + \dfrac{0.1}{59.25-x}\right)$, και βλέπουμε ότι το πηγάδι δυναμικού στο φεγγάρι είναι 0.4, ενώ στη γη 1.0, οπότε το διαστημόπλοιο χρειάζεται περίπου 2.5 φορές περισσότερη ενέργεια για το ταξίδι γη => σελήνη απ'ότι για το ταξίδι σελήνη => γη. Στο ίδιο αποτέλεσμα καταλήγουμε χωρίς κανένα σχήμα, απλά μελετώντας την ταχύτητα διαφυγής από τη γη, $v_{e,e}$ και από το φεγγάρι, $v_{e,m}$. Η ταχύτητα διαφυγής από ένα πλανήτη μάζας Μ και ακτίνας R είναι $v_e = \sqrt{2GM/R}$.Υπολογίζοντας το λόγο $v_{e,e}^2 / v_{e,m}^2$ βρίσκουμε πάλι 2.5.

4. Ενας αλεξιπτωτιστής πέφτει από ένα αεροπλάνο που κινείται με ταχύτητα v_0=200 km/h. Η δύναμη που δέχεται ο αλεξιπτωτιστής λόγω της αντίστασης του αέρα είναι **F**= -b**v**. Βρείτε την ταχύτητα **v** του αλεξιπτωτιστή (ως προς ένα παρατηρητή στη γη) σαν συνάρτηση του χρόνου.

Λύση

Η δύναμη στο x-άξονα είναι μόνο η αντίσταση του αέρα, οπότε $m\dot{v}_x = -bv_x \Rightarrow v_x(t) = v_x(0)e^{-bt/m} = v_0 e^{-bt/m}$, αφού η αρχική ταχύτητα του αλεξιπτωτιστή στον άξονα x είναι η ταχύτητα του αεροπλάνου v_0. Στον άξονα y έχουμε και τη βαρύτητα, οπότε $m\dot{v}_y = mg - bv_y \Rightarrow v_y(t) = v_{\text{ορ}} + ae^{-bt/m}$, όπου $v_{\text{ορ}} = mg/b$ είναι η οριακή ταχύτητα. Αφού για t=0 η αρχική ταχύτητα είναι 0, έπεται ότι η σταθερά a είναι $a = -v_{\text{ορ}}$, οπότε $v_y(t) = v_{\text{ορ}}(1 - e^{-bt/m})$.